دو مفهوم کلیدی ریاضی

دورهٔ آموزش ابتدایی

محمدحسام‌قاسمی
کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شهرستان شهریار

اشاره
ریاضی بین- فرهنگی و توضیح، دو مفهوم کلیدی از کتاب «مفاهیم کلیدی در تدریس ریاضیات دوره ابتدایی» هستند که «درک هایلوک و فیونا تانگاتا» نویسندگان این کتاب، با تألیف آن تلاش دارند چهل و چهار مفهوم مطرح (موضوع کلیدی مهم) در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی را به شیوه‌ای موجز و به نسبت جذاب و با ادبیاتی علمی اما نه چندان پیچیده معرفی و تبیین نمایند.

کلیدواژه‌ها: ریاضی بین- برنامه‌ای، خانه به‌عنوان زمینه‌ای برای سواد عددی، یادگیری مفهوم، برقراری ارتباط و اتصال، یادگیری اصل‌ها، پرسش‌گری

ریاضی بین- فرهنگی

تعریف

پیدایش و توسعهٔ ایده‌های ریاضی، ریشه در تاریخ عمیق بسیاری از فرهنگ‌های دنیا دارد. تمام افراد در سراسر جهان، با ریاضی سروکار دارند، البته با نظام‌های عددی و روش‌های محاسباتی متفاوتی که متناسب با فرهنگ خودشان است. «ریاضی بین- فرهنگی[1]» را می‌توان آن بخش از ریاضیات دانست که سعی در شناسایی همین تجربه‌های گوناگون ملت‌ها و میزان مشارکت فرهنگ‌های مختلف در ریاضی را دارد. ورود ایده‌ها و نظریه‌های ریاضی بین- فرهنگی از اقوام مختلف و تجربه‌های تاریخی آن‌ها به کلاس درس، به دانش‌آموزان ابتدایی کمک می‌کند تا درک خود را از چگونگی توسعهٔ دانش ریاضی افزایش داده و قدردان فرهنگ‌هایی باشند که در شکل دادن به پیکرهٔ فعلی دانش، نقش داشته‌اند.

توضیح و بحث

ریاضیات مقوله‌ای جهانی است، به گونه‌ای که تمام انسان‌ها در سراسر جهان و در تمام دوره‌های تاریخی، برای رفع نیازها و پاسخ به پرسش‌های خود در سطوح مختلف، با آن درگیر بوده‌اند (زاسلاوسکی[2]، ۱۹۹۶). گاهی اوقات، ریاضی به‌عنوان یک موضوع مبرا از فرهنگ و ارزش‌های انسانی مطرح می‌شود. در واقع این تصوری است که بعضی از دانش‌آموزان از ریاضی دارند که تصوری اشتباه است. به همین دلیل در سال‌های اخیر، برنامه‌های درسی ریاضی در انگلستان، علاوه بر مؤلفه‌های قبلی، جهت توجه بیشتر به نیازهای سیاسی، اجتماعی و فرهنگی جامعه، دوباره طراحی و بازنویسی شده‌اند (آسکیو، ۲۰۰۱؛ براون، ۲۰۰۱؛ رینالد و موییس، ۱۹۹۹[3]). این نوع تغییرات به نوبهٔ خود جدید و با نگرشی متفاوت

با آنچه قبلاً تصور می‌شـد همراه بـود. زیرا در طول تاریخ، همواره توسعهٔ ریاضی بر اساس نیازهای عمدتاً مادی، تکنولوژیکی و اکتشـافات علمی بوده است؛ از پیشرفت‌های هندسـی به‌دست آمده توسط یونانیان باستان گرفته که در جهت رفع نیازشان به اندازه‌گیری زمین‌ها و تحقق رویاهای معماری و شهرسازیشان بود تا اختراع ماشین‌حسـاب در انگلسـتان و آلمانِ قرن هفدهم که به منظور تسریع در تحقیقات علمی اتفاق افتاد، تـا ریاضیات امروزی که ماهیـت آن در عصر تکنولـوژی و انفجار اطلاعات، در حال تغییر اسـت، همهٔ این‌ها، نمونه‌هایی از سـابقهٔ نگرش انسان‌ها به ریاضیات اسـت. بنابراین، دانش‌آمـوزان باید بدانند که ریاضیات، یک حوزهٔ اطلاعاتی ایسـتا نیسـت که تنها باید به درون ذهن‌ها منتقل شـود، بلکه در تمام فرهنگ‌ها و تمام زمان‌ها، ریاضی به گونه‌ای توسـعه یافته و در حال توسـعه است که ارزش‌های فرهنگی غالب را، برجسته‌تر سازد.

جسـت‌وجو کـردن جنبه‌های چنـد- فرهنگی ریاضی، می‌توانـد باعث افزایش درک دانش‌آموزان از چرایی و چگونگی توسـعهٔ نظریه‌های ریاضی شـود. مثال‌هـای بین- فرهنگی را می‌تـوان به منظور ارائهٔ تصویـری دقیق‌تـر از تاریخ ریاضیات نیز اسـتفاده کرد. آگاهی از نقش فرهنگ‌های مختلف در توسـعهٔ ریاضیات، می‌تواند در اصلاح و تغییر این تصور اشتباه که اروپا یا غرب، خاستگاه اغلب نظریه‌ها و یافته‌های ریاضی اسـت، کمک کند. برای نمونه، اگرچه قضیهٔ فیثاغورس را با نام یک ریاضی‌دان برجسـتهٔ یونانی و براساس تلاش‌های او در یونان باستان می‌شناسند، اما شواهدی هست که نشان می‌دهد این قضیه، حداقل چند هزار سال زودتر و توسط چینی‌ها و حتی قبل‌تر از آن، توسط بابِلی‌ها به‌کار گرفته شده است (سوییتز و کائو[4]، ۱۹۷۷).

تجربه‌های ریاضیِ بین- فرهنگی، به کودکان در درک کاربرد همگانی ریاضی کمک می‌کند و آن‌ها را متوجه این حقیقت می‌سازد که همه قادرند با ریاضی کار کنند و ریاضـی می‌تواند برای تمام دانش‌آموزان از هر نوع و نژادی که باشـند، عمومیت داشته و مورد توجه قرار گیرد. زاسلاوسـکی، با توجه به تفاوت‌های موجود بین ملت‌ها و فرهنگ‌های مختلف، بیان می‌کند که «مردم، اشیا را می‌شمارند، کمیت‌های مختلف را اندازه‌گیری می‌کنند، تقویم‌ها و روش‌های محاسـبهٔ گـذرِ زمان را ابداع می‌کنند، بـه طراحی‌های هنری دسـت می‌زنند، ساختمان‌سازی می‌کنند، بازی‌هایی انجام می‌دهند که شـامل مفاهیم ریاضی است و در نهایت، قادرند حوزه‌ای از علم را همراه با اصطلاحات مخصوص به آن، ارائه کنند که همهٔ این اقدامات را در ساختاری علمی، توضیح دهد» (۱۹۹۶،۱).

نقش معلم در اینجا، بسـیار حائز اهمیت اسـت. او می‌تواند با انتخاب مثال‌های مناسب، در تشخیص شـباهت‌ها و تفاوت‌های بین ریاضیات فرهنگ‌های مختلف، به کودکان کمک کرده و از ایجاد این ذهنیت که ریاضیات سایر فرهنگ‌ها از پیچیدگی، پیشرفت و اهمیت کمتری برخوردار است، جلوگیری کند.

مثال‌های عملی

در ادامه، سـه نمونـه از تجربه‌های ریاضی بین- فرهنگی را معرفی می‌کنیم.

تاریخچهٔ صفر

بسـیاری از کودکان در به‌کارگیـری عدد صفر در محاسـبات خود، دچار مشـکل می‌شـوند، چه هنگامی‌که صفر را به‌عنوان یک عدد مشخص و مجزا بـه‌کار می‌برند و چه هنگامی‌کـه آن را به‌عنوان یک رقم از ارقام یک عدد استفاده می‌کنند. بنابراین، برای دانش‌آموزان بسـیار جالب و آموزنده است که بدانند صفر، یک موضوع چالش‌برانگیز برای بشریت در طول تاریخِ توسـعهٔ نظام‌های شمارشی بوده است. معلمان در مدارس ابتدایی می‌تواننـد به همراه دانش‌آموزان خود، این تاریخچه را مطالعه و موشکافی کنند. برای مثـال، می‌توانند تحقیق کنند کـه چگونه بابِلی‌های قدیم، یک نظام ارزش مکانی مخصوص به خود را برای شـمارش ابداع کرده بودند در حالی‌که هرگز نمادی را بـرای صفر در نظر نگرفتـه بودند. یا دانش‌آموزان، می‌توانند به مطالعهٔ ریاضیات مایاها[5] بپردازند، اقوامی که در آمریکای مرکـزی زندگی می‌کردند، ناحیه‌ای که امروزه جنوب مکزیک، گواتمالا و بیلز شـمالی را در برمی‌گیـرد. مایاها تا سـال ۶۶۵ میلادی، از یک نظام شمارشـی با ارزش‌مکانی بر پایهٔ بیست استفاده می‌کردند و نمـادی را نیز برای صفـر معرفی کرده بودند. کار با اعداد مایایی می‌تواند برای دانش‌آموزان،

شـــادی‌بخش و همراه با فرصت‌هایی برای تفکر باشد. همچنین، می‌توان دانش‌آموزان را متوجه این موضوع ساخت که نظام شمارشـــی که امروزه از آن استفاده می‌شـــود، ریشه در نظام ارزش مکانی بر پایهٔ ۱۰ دارد که هندوهای قدیم، آن را ایجاد کرده‌اند. در هندوستان قدیم، ابتدا صفر به‌عنوان یک رقم با معنای خاص خود در بین ارقامِ یک عددِ چند رقمی اســـتفاده می‌شد و بعدها، خود به‌عنوان یک عدد مســـتقل در نظر گرفته شد، که در شروع، به‌عنوان یک کلمه و بعدها به‌صورت یک نماد تعریف شد. تاریخچهٔ صفر و تأثیر آن بر نظام شمارش، موضوع بسیار جالبی است که فرهنگ‌های متعددی در گسترش آن سهیم هستند. نظام شمارشِ هندی‌ها و نحوهٔ کار با آن، در ابتدا از هند به ســـمت شـــرق تا چین و به سمت غرب تا کشورهای اسلامی، پیشـــروی کرد و بعدها از طریق تاجران مســـلمان به ایتالیا و دیگر کشورهای اروپایی وارد شد. در ایتالیا و در حدود ســـال ۱۲۰۰ میلادی، فیبوناتچی[۶] از نُه رقم هندی به همراه نمادِ ۰، در کارهای خود استفاده کرد. اما این نظام شمارشیِ جدید، هنوز نوپا بود و تاجران ایتالیایی، تمایلی برای استفاده از آن و کنار گذاشتن ارقام رومی نداشتند. سرانجام در قرن پانزدهم، با رشد تجارت و فراوانی کاغـــذ، اعداد هندی-عربی به همراه شالودهٔ آن، یعنی نظام شمارش بر پایهٔ ۱۰ مورد توجه و استفاده قرار گرفت. مردم کم‌کم از مزایای این نظام نوین برای انجام محاسبات خود مطلع شدند و تا امروز نیز، آن را به‌کار می‌گیرند.

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۲	۴	۶	۸	۱	۳	۵	۷	۹
۳	۳	۶	۹	۳	۶	۹	۳	۶	۹
۴	۴	۸	۳	۷	۲	۶	۱	۵	۹
۵	۵	۱	۶	۲	۷	۳	۸	۴	۹
۶	۶	۳	۹	۶	۳	۹	۶	۳	۹
۷	۷	۷	۳	۱	۸	۶	۴	۲	۹
۸	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۹
۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹	۹

شکل ۱: مربع وِدایی

مربع وِدایی[۷]

اولیـــن متون ریاضـــی هندی متعلق بـــه وِداها[۸] اســـت که بـــه حدود ۱۰۰۰ ســـال پیـــش از میلاد مســـیح برمی‌گردد. یک نمونـــه از یافته‌های وداها، جدول ضربی اســـت که در شکل ۱ نشان داده‌ایم که بـــه آن، «مربع وِدایی» نیز گفته می‌شـــود که ۹×۹ اســـت. آنچه که به‌عنوان حاصل‌ضرب در هر یک از خانه‌ها قرار می‌گیرد، «ریشـــهٔ رقمی[۹]» حاصل‌ضرب اســـت، با این تعریف که هـــر حاصل‌ضرب با بیش از یک رقم را با یک عدد تک رقمی جایگزین می‌کنیم. ایـــن عدد تک رقمی را مجموع ارقامِ حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم (برای مثال، ۵۶=۸×۷، ۱۱=۶+۵ و در نهایت ۲=۱+۱، عدد ۲ را به‌عنوان ریشـــهٔ رقمی ۸×۷ در نظر می‌گیریم). وقتی جدول کامل شود، الگوهای جالبی به دست می‌آید. با دنبال کردن اعداد مشابه و متصل کردن آن‌ها به یکدیگر، می‌توان بعضی از این الگوها را ساخت. مثلاً اگر همهٔ ۱ها را با یک خط به هم وصل کنیم، یک شش‌ضلعی به دست می‌آید که می‌توان از آن، به‌عنوان یک الگو در کاشـــی‌کاری‌ها استفاده کرد. به همین ترتیب، سایر الگوهای مربوط بـــه اعداد از ۲ تا ۹ را می‌توان رســـم کرد. این مربع، ارتباط شگفت‌انگیزِ بین اعداد و الگوهای هندسیِ هنر اسلامی را که بعدها به‌وجود آمدند، آشکار می‌سازد.

مصری‌ها

ریاضیـــات مصر باســـتان، سرشـــار از ایده‌های تاریخی معروف است که می‌تواند در کلاس ریاضی، مطرح شده و فرصت‌هایی را برای فعالیت‌های ریاضی فراهـــم کند. مثلاً یکی از تصویرهای آشـــنا و جالب بـــرای اکثر دانش‌آموزان در مـــدارس ابتدایی، اهرام

ثلاثهٔ مصر است. دانش‌آموزان می‌توانند به آسانی و طی یک فعالیت، الگوهایی از هرم‌ها را با قاعدهٔ مربع، روی یک کاغذ رسم کنند که شامل وجه‌ها و یال‌هایی است که بعدها برای تا زدن و چسباندن، برش می‌خورند و یک حجم سه بعدی مشابه هرم به دست می‌آید. این امر می‌تواند شروعی برای ساخت سایر هرم‌ها با قاعدهٔ غیر مربعی باشد. همچنین، دانش‌آموزان می‌توانند با اعداد و نظام شمارش مصری‌ها آشنا شده و از لذت کار با آن‌ها بهره‌مند شوند، زیرا این نظام شامل نمادهای هیروگلیف[10] برای یک، ده، صد، هزار، ده هزار، صد هزار و یک میلیون است، اما هیچ نمادی برای صفر ندارد. اگرچه این نظام بر پایهٔ ۱۰ است اما فاقد ارزش مکانی برای ارقام یک عدد است. می‌توان از دانش‌آموزان خواست که با اعداد مصری، معادله‌های عددی ساده را حل کنند تا به اهمیت وجود ارزش مکانی پی‌برده و متوجه مزیت و قدرت آن در نظام شمارش امروزی شوند. چگونگی استفادهٔ مصری‌ها از کسرها نیز، از دیگر موضوعات جذاب ریاضی مصری است. مصری‌ها، کسرهای با صورتِ غیر از یک را عمدتاً به شکل مجموع کسرهایی نشان می‌دادند که صورت آن‌ها یک بود. برای مثال، کسر $\frac{۲}{۵}$ را به‌صورت $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۵}$ و کسر $\frac{۷}{۸}$ را نیز به‌صورت $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$ می‌نوشتند. کار بر روی چنین کسرهایی، فرصت خوبی را برای ارتقای درک و فهم دانش‌آموزان از عملیات بر روی کسرها فراهم می‌سازد.

مطالعهٔ بیشتر

گفته‌های زاسلاوسکی (۱۹۹۶) بسیار پربار بوده و می‌توانند راهنمای ایده‌های عملی فراوانی باشد. همچنین وب‌سایتی با عنوان «تاریخچهٔ ریاضی مک‌چیوتر[11]» به نشانی (www.groups.dcs.st-and.ac.uk) موجود است که از منابع اصلی و مهم در این زمینه است. همان‌طور که قبلاً نیز توضیح دادیم، ریاضی بین- فرهنگی، نقش مهمی در رسیدن به برخی از هدف‌های آموزشی در ریاضی ایفا می‌کند. برای درک بهتر این موضوع به‌ویژه در مدارس ابتدایی، می‌توانید به کتاب براون و هایلاک (۲۰۰۴)، بخش منسوب به تانگاتا که در همین زمینه است، مراجعه کنید.

توضیح[12]

تعریف

«توضیح‌دادن»، مهارتی کلیدی در تدریس است که معلمان به کمک آن، می‌توانند به دانش‌آموزان خود کمک کنند تا تکلیف‌ها، هدف‌ها، فرایندها، مفاهیم، اصول و روابط ریاضی را به‌صورتی واضح‌تر بشناسند. به گفتهٔ راگ و براون (۲۰۰: ۶)، «توضیح، شناساندن به دیگری است». نکتهٔ دیگر اینکه هر چند در ارائهٔ توضیح، دانش‌آموزان نیز می‌توانند در کلاس درس در نقش فعال مشارکت داشته باشند، اما تمرکز اصلی ما در این کتاب، بیشتر بر انجام این عمل از جانب معلم است.

توضیح و بحث

به گفتهٔ هایلاک (۲۰۰۶: ۱)، یکی از بهترین روش‌ها برای یاددهی و فهماندن اکثر مطالب ریاضی در دورهٔ ابتدایی این است که معلم، اول آن مطلب را خوب بفهمد و سپس بتواند خوب برای دانش‌آموزانش توضیح دهد. اکثر تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان، معمولاً معلمی را بیشتر دوست دارند که مسائل را بهتر برایشان باز کند و به‌اصطلاح بهتر توضیح دهد (راگ، ۱۹۸۴).

تأکید بر توضیح‌دادن به‌عنوان یک مهارت مهم در تدریس ریاضی، نه تنها با روح ساخت‌وسازگرایی و ایجاد و بنای شناخت توسط خود دانش‌آموز منافاتی ندارد، این در حالی است که ممکن است تصور شود که توضیح‌دادن، فرایندی از نوعِ «انتقال یک‌طرفهٔ مفاهیم» است و در نتیجه، با رویکرد ساخت‌وسازگرایی در تناقض است، که چنین نیست. بلکه توضیحات معلم می‌تواند بخشی از تجربیاتی باشد که به دانش‌آموزان در ساخت دانش خود، کمک می‌کند. این توضیح معلم است که به دانش‌آموز یاد می‌دهد که چگونه از نوع تفکر و تجربه‌های معلم خود، برای جست‌وجو و شناساییِ نحوهٔ ارتباط دانش جدید با دانش موجود، بهره بگیرد.

توضیحِ خوب، آن است که ماهرانه و هدف‌دار باشد و همواره در آن، از پرسش‌های مناسب استفاده شود و شیوه‌ای ارائه شود که دانش‌آموز بتواند از تمام مطالب متنوع عرضه شده در یک جلسهٔ درس، چکیده‌ای را در قالب جمله‌های کلیدی، در ذهن

دانش‌آموزان باید بدانند که ریاضیات، یک حوزهٔ اطلاعاتی ایستا نیست که تنها باید به درون ذهن‌ها منتقل شود، بلکه در تمام فرهنگ‌ها و تمام زمان‌ها، ریاضی به گونه‌ای توسعه یافته و در حال توسعه است که ارزش‌های فرهنگی غالب را، برجسته‌تر سازد.

خود ضبط کند. بنابراین، توضیح معلم می‌تواند آویزهٔ گوش دانش‌آموز قرار گرفته و او را در مراحل بعدی و هنگام تحقیق و اکتشاف، کمک کند. برای مثال، اگرچه دانش‌آموز می‌تواند درک و فهم خود را از تفریق اعداد سه‌رقمی (بر مبنای ساخت‌وسازگرایی) و از روی مقایسهٔ قیمت‌ها و استفاده از سکه‌ها بسازد، اما یک معلم با قدرت بیان خوب، می‌تواند همین کار را با یک توضیح دقیق و سنجیده از فرایند تفریق به کمک روش تجزیه، انجام دهد.

طبق تعریفی که از «توضیح» بیان شد، یک توضیحِ خوب همیشه به دنبال افزایش درک و فهم دانش‌آموزان است و در یک توضیحِ مؤثر، از مثال‌ها و نامثال‌ها[۱۳]، مثال‌های تصویری، استدلال و مقایسه استفاده می‌شود. به این ترتیب، ایده‌های مجرد ریاضی در موضوعات مختلف را می‌توان به کمک توضیح دادن، در قالبی بیان کرد که دانش‌آموزان را قادر سازد تا با مفاهیم مجرد، رابطه برقرار کنند. مثلاً هنگام کار با نمادهای جدید ریاضی، با بهره‌گیری از یک توضیحِ خوب و غیررسمی شامل شکل‌ها و تصویرها، مثال‌های عینی و اشیای ملموس، می‌توان کاری کرد که برقراری رابطه با آن نمادها (که در حالت معمول درک آن‌ها خیلی سخت است)، آسان شود. بسیار مهم است که توضیحات ارائه شده، تنها از جانب معلم متقاعد کننده نباشد. بلکه معلم باید مخاطبِ توضیحات خود را خوب بشناسد و تا جائی که امکان دارد، خود را به‌جای شنونده قرار دهد و متناسب با سطح او، به بیان توضیح بپردازد که مسلماً، این کار آسان نیست. توضیح به چاشنی‌های متعددی نیز نیاز دارد! به این معنا که هنگام بیان یک توضیح، معلم باید به‌خوبی از قدرت «حرکات فیزیکیِ دست و صورت خود[۱۴]» و مهارت‌های سخنوریT نهایت استفاده را ببرد و حین توضیح دادن، از رسم نمودارهای ساده و شکل‌های کمکی بر روی تابلو استفاده کند و واژه‌ها و اعداد مهم و کلیدی را نیز، گوشه‌ای از تابلو یادداشت کند تا دانش‌آموز با دیدن و متصل‌کردن همهٔ آن‌ها به یکدیگر، ادامهٔ توضیح معلم را بفهمد و دنبال کند.

توضیح‌دادن، مهارتی کلیدی در تدریس است که معلمان به کمک آن، می‌توانند به دانش‌آموزان خود کمک کنند تا تکلیف‌ها، هدف‌ها، فرایندها، مفاهیم، اصول و روابط ریاضی را به‌صورتی واضح‌تر بشناسند

توضیحِ خوب، دارای ویژگی‌های مشخصی است که راگ و براون (۲۰۰۱ a، ۹-۷)، برخی از آن‌ها را به شرح زیر، بیان کرده‌اند (که ما نیز در ادامهٔ بحث، سعی در بازکردن همین ویژگی‌های مهم داریم.)

۱. معلم باید دارای یک «ایدهٔ اصلی» یا قاعدهٔ کلی در ذهن خود باشد،

۲. از «آواها» در کلام خود به درستی استفاده کند،

۳. بر «دانشِ موضوعی» مربوط به آن درس مسلط بوده و از ساختارهای آن موضوع، آگاه باشد.

داشتن یک ایدهٔ اصلی یا قاعدهٔ کلی در ذهن

محور قرار دادن یک ایده یا یک قاعدهٔ کلیدی، می‌تواند جریان توضیحات معلم را هدایت کرده و به درک واضح‌تر مسائل موجود، کمک کند و این حتی به خود معلم نیز برای آنکه بداند در کجای جریان تدریس قرار دارد، کمک می‌کند. برای مثال، در جمع ستونی اعداد چند رقمی، هنگامی‌که برای دانش‌آموز توضیح می‌دهیم که اگر در جمع ستونیِ دو عدد، حاصل‌جمع برابر با یک عدد دو رقمی شود، باید یکان آن را نوشته و دهگان آن را به رقم واقع در ارزش مکانی بعدی اضافه کنیم، این توضیح حاوی یک قاعدهٔ اصلی است که باید آن را همواره محور قرار دهیم. این قاعده آن است که ارزش مکانی هر رقم در ستون چپ، مثلاً رقم ۱، ده برابر ارزش مکانی رقم ۱ در ستون سمت راست است و این قاعده برای ستون‌های بعدی نیز صادق است. برای درک بهتر، به عملیات ستونی دو عدد زیر دقت کنید:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 236 \\ +727 \\ \hline 3 \end{array}$$

در این عملیات، عدد ۱ (که در بالای عملیات و به رنگ روشن‌تر نوشته شده است)، دارای ارزش ۱۰ برای ردیف قبلی است و این ایده که نباید آن را تنها عدد ۱ دید، می‌تواند همان ایدهٔ کلیدیِ مورد نظر در چنین عملیاتی باشد.

استفاده درست از آوا[۱۵]

تنوع در استفاده از آوا به همراه رعایت سایه روشن‌ها در لحن صدا، تأکیدهای به‌جا و همراه‌کردن اشاره و حرکات، از امور مهم هنگام اجرای یک توضیح موفق محسوب می‌شوند. به‌خصوص آهنگِ

کمک به دانش‌آمـــوزان در یادگیری الگوهای زبانی، نقش مهمی را ایفا می‌کند. مثلاً یک نمونه از استفادهٔ درســـت از آوا و آهنگ هنگام توضیح دادن، می‌تواند به این صورت باشـــد (این مثال در مورد اصل متمم بودن دو عدد نســـبت به عدد ۱۰ است که به همراه تأکیدهای به موقعِ آوایی که آن‌ها را به‌صورت ایرانیک مشاهده می‌کنید و حرکات فیزیکی که آن‌ها را درون پرانتز مشاهده می‌کنید، آورده شده است)

«ده (باز کردن تمام انگشـــتان دو دست)، منهایِ (بســـتن تمام انگشتان و باز کردن ۴ انگشت از دست راست) چهار (مکث کوتاه) می‌شود (بستن ۴ انگشت و باز کردن ۶ انگشـــت دیگر) شش (مکث). پس، (باز کردن دوبارهٔ انگشـــتان دو دســـت) ده، منهایِ (باز نگه‌داشـــتن همان ۶ انگشت قبلی و بستن ۴ انگشت دیگر) شـــش (مکث کوتاه و ســـپس با لحنی آرام و پرسشی) می‌شود؟... (سکوت برای شنیدن واکنش و پاسخ دانش آموزان)». (هایلاک و کوکبرن، ۲۰۰۳)

آگاهی معلم از ساختار و دانش موضوعی که آن را تدریس می‌کند (تسلط بر دانش موضوعی)

کامل بودن دانش و آگاهی معلم و تســـلط او بر موضـــوع تدریس، پیش‌نیاز یک توضیح مؤثر اســـت. معلمان قبل از اینکه شـــروع به تدریس یک مبحث کنند، باید بر آن مبحث اِشراف کامل داشته باشند و مشخص کنند که کدام نظریه‌ها و موضوع‌ها، بعدها به این موضوعِ پیش‌رو ارتباط یا ارجاع داده می‌شـــوند و کدام دسته از مثال‌ها برای تضمین درک بهتر مفاهیم، قواعد و فرایندها، مناســـب‌تر و کارآمدتر هستند. این از پیش‌نیازهای اساســـی برای توضیح مطالب ریاضی اســـت که معلم، درک دقیقی از ساختار ارتباطی بین نظریه‌های ریاضی در پایـــه‌ای که تدریس می‌کند و دیگر پایه‌ها، داشته باشد. گیفورد (۲۰۰۵: ۷۵)[۱۶]، بر خلاف تصور آن‌هایی که فکر می‌کنند موضوعِ اِشراف کامل معلم بـــر دانش، نظریه‌ها و ســـاختارها، برای معلمانی که به کودکان پیش‌دبستانی (۳ تا ۵ ساله) درس می‌دهند ضروری نیست، معتقد است که حتی برای تدریس مفاهیم بسیار پایه‌ای ریاضی به کودکان خردســـال نیز، برخورداری از ســـطح بالایی از دانش موضوعی ریاضی لازم اســـت و دانش و آگاهی معلم از مفاهیم، حقایق و مهارت‌های موضوعی در ریاضی، به وی دیدی وســـیع‌تر نســـبت به ریاضی می‌بخشد کـــه برای کمک به دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی، ضروری است.

مثال‌های عملی

معلمان مـــدارس ابتدایی می‌تواننـــد با تکیه بر مهارت‌های شـــخصی خود یا با به اشتراک گذاشتن تجربه‌هایشان با ســـایر همکاران، در مورد شیوه‌های بهینه کردن توضیحات، به اطلاعات مفیدی دســـت یابنـــد. البته بخش‌های مختلف ریاضی، ســـبک‌های مختلف توضیح‌دادن را نیز می‌طلبد. مثلاً توضیح‌دادن در مورد تکلیف‌ها، هدف‌ها، فرایندها، مفاهیم، اصول و روابـــط ریاضـــی، می‌توانند تفاوت‌هـــای ظریفی با یکدیگر داشته باشند. در اینجا سعی می‌کنیم به ارائهٔ مثال‌هایی دربارهٔ توضیح دادنِ ســـه بخش تکلیف‌ها، هدف‌ها و فرایندها بپردازیم.

توضیح‌دادن در مورد یک تکلیف

به یک گروه از دانش‌آموزان ۶ تا ۷ ساله، تکلیفی داده شده است که بر اساس آن، باید مجموعه‌ای از ۶ ظرف مختلف را از کوچک به بزرگ، بر اساس گنجایش و بـــا آزمایشِ ریختن آب از یکی بـــه درون دیگری مرتب کنند. قبل از اینکه کودکان شـــروع به فعالیت کنند، معلم باید وظایف آن‌ها را توضیح دهد و بگوید که مفهوم گنجایش یک ظرف و مفهوم دسته‌بندی از کوچک به بزرگ چیست و اگر یک ظرف را پر کرده و سپس آب موجود در آن را در ظرفی دیگر بریزیم، چه اتفاقی می‌افتد. این توضیحات، باعث ایجاد حس اطمینان در دانش‌آموزان، از درک آن چیزی می‌شود که سعی دارند به آن برسند. همچنین، توضیح معلم باید شـــامل پایان کار و چگونگی ارائهٔ نتایج توســـط دانش‌آموزان باشـــد. حتی این توضیح، به‌جای آنکه به‌صورت کلامی باشد، می‌تواند فیزیکی باشد و معلم از یـــک دانش‌آموز بخواهد که جلو هم‌کلاســـی‌های خود، با ریختن آب در دو ظرف که مشـــخص نیست کـــدام یک بزرگ‌تـــر و کدام یک کوچک‌تر اســـت، گنجایش آن‌ها را با هم مقایســـه کند و با این کار، به شـــناخت آنچه قرار است در فعالیت مورد نظر انجام شود، کمک کند.

توضیح‌دادن در مورد هدف

در شروع هر بخش یا هر فصل از تدریس، توضیح هدف‌های آن بخش، می‌توانـد هم به آن‌ها و هم به خـود معلم کمک کند. مثلاً معلم می‌تواند در ابتدای جلسه بر روی تابلو بنویسد که «هدف ما برای امروز، یادگیری نحوهٔ محاسبهٔ ذهنی عملیات بر روی اعدادِ نزدیک به دوبرابر[17] اسـت». ایـن جمله فقط عنوانِ هدف است، اما برای توضیح این هدف، معلم باید بیان کند که این هدف، با آنچه دانش‌آموزان در گذشته یاد گرفته‌اند، چه ارتباطی دارد و از روش پرسش و پاسخ برای توضیح مفاهیم یا واژه‌های کلیدیِ به‌کار رفته در متن هدف مانند «محاسبه»، «دوبرابر»، «نزدیک به دوبرابر» و «ذهنی» استفاده کند. پس از همهٔ این‌ها، معلم یکی دو نمونه از محاسباتی را که قرار است در نهایت دانش‌آموزان یاد بگیرند، با همین اسـتراتژی ذهنیِ عنوان شـده در هدف، مثـال می‌زند. مثلاً با نوشتن عبارت‌های ۲۸+۲۹ و ۱۵۲+۱۴۹ روی تابلو، از دانش‌آموزانش می‌خواهد که توضیح دهند چرا این‌ها را تقریباً دوبرابر می‌نامیم؟ تا از درک مفهوم «نزدیک به دوبرابر» توسط کودکان، اطمینان حاصل کند.

یک توضیحِ خوب همیشه به دنبال افزایش درک و فهم دانش‌آموزان است و در یک توضیحِ مؤثر، از مثال‌ها و نامثال‌ها، مثال‌های تصویری، استدلال و مقایسه استفاده می‌شود

توضیح در مورد یک فرایند

یکی از روش‌های مهم محاسبهٔ ذهنی برای عمل جمع آن است که از استراتژی پل‌زدن بر روی مضارب عـدد ۱۰، اسـتفاده کنیم. برای نمونـه، هنگامی‌که می‌خواهیم به‌طور ذهنی عدد ۸ را با ۵۷ جمع کنیم، می‌توانیم ۳ را به ۵۷ اضافه کنیم تا به ۶۰ برسـیم و سـپس ۵تای باقی‌مانده از ۸ را به آن اضافه کنیم تا به حاصل‌جمع یعنی ۶۵ برسـیم. معلم برای توضیح ابتدایی این فرایند، بایـد با دانش‌آموزان تمرین کند کـه ده تا ده تا بشـمارند و روش‌های مختلف تجزیهٔ عدد ۸ بـه دو عدد کوچک‌تر را توضیـح دهند. این کار همراه با توضیحـات معلم پیش‌نیاز انجام مراحل بعدی کار است. سپس معلم یک تصویر دیداری مثل یک مربع صدتایی را با این فرایند همراه می‌سـازد و از دانش‌آمـوزان می‌خواهد کـه از روی تصویر مربع، توضیـح دهند که اگر از ۵۷ در مربع شـروع کنند و ۳تا بشمارند به چه عددی خواهند رسید. آن‌ها پاسخ می‌دهند عدد ۶۰، سـپس از آن‌هـا می‌خواهد ۵تای دیگر نیز بشمارند تا به ۶۵ برسند.

همچنیـن برای توضیح فرایند مثـال بالا، معلم می‌تواند از توضیحی دیگـر نیز کمک بگیرد. مثلاً ۸ سـکهٔ ۱ پنی را به ۵۷ پنی موجـود اضافه می‌کند و هنگام اضافه کردن این سکه‌ها به یکدیگر، از حرکات فیزیکـی و آوا نیز به‌طور هم‌زمان بهره می‌گیرد تا به ۶۰ پنی برسـد و به همین شکل، این مسیر را ادامه می‌دهد. حتی معلمان می‌توانند هر دو روش توضیح دادن را با هم به‌کار ببرند. بهتر اسـت معلم در پایان کار خود، به چند نامثال (مثل ۵۳+۴) نیز اشاره کند و از دانش‌آموزان بپرسد که آیا این روش، برای این نوع مثال‌ها هم مناسـب است یا خیر؟ و از آن‌ها بخواهد که دلیل خود را توضیح دهند.

مطالعهٔ بیشتر

معلمان ابتدایی برای پیشـرفت و بهبود کیفیت توضیحات خـود در درس ریاضی، می‌توانند از نمونه توضیحات موجود در کتاب هایـلاک (۲۰۰۶) بهره ببرند. هایلاک این کتـاب را با هدف تجهیز معلمان بـه اطلاعاتی که برای کسـب توانایـی لازم در امر توضیـح‌دادن مباحث ریاضی ضروری اسـت، تألیف کرده اسـت. همچنین منبع راگ و براون (۲۰۰۱)، از منابـع اصلی در زمینهٔ مهارت‌هـای توضیح‌دادن است که ما بخش‌هایی از آن را در این قسمت، مورد استفاده قرار دادیم.

پی‌نوشت‌ها

1. Cross-Cultural Mathematics
2. Zaslavsky
3. Askew & Brown & Reynols & Muijs
4. Swets & Kao
5. Mayas
6. Fibonacci
7. Vedic square
8. Vedas
9. Digital root
10. Hieroglyphic
11. MacTutor History of Mathematics
12. Explanation
13. Examples and non-examples
14. Body language
15. Voice
16. Gifford
17. Near-doubles